



Függvények – Felvételi

Fuggvenyek_01_2012_első_07

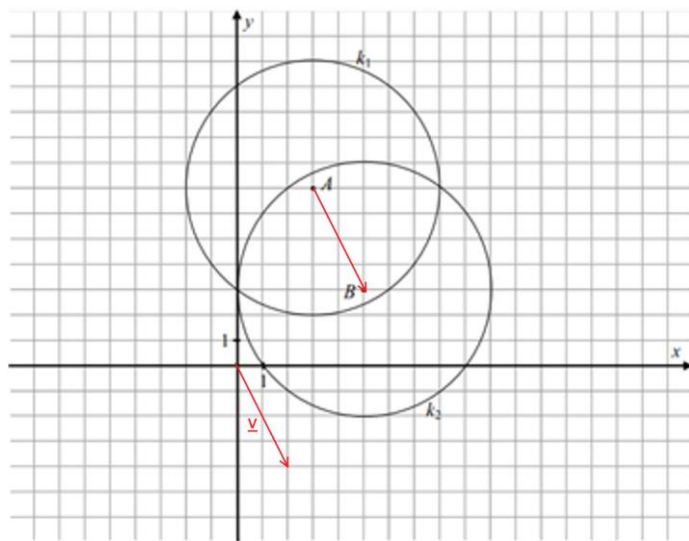
Az ábrán látható k_1 kör középpontja az $A(3; 7)$ pont, a k_2 kör középpontja a $B(5; 3)$ pont. Mindkét kör sugara 5 egység.

a) Rajzolj be az ábrába egy olyan vektort, amely az origóból indul, és amellyel a k_1 kört eltolva a k_2 kört kapjuk!

A vektorokkal nem fogunk a központi felvételin találkozni. Ennek ellenére jöjjön a megoldás:

Ez a vektor egyenlő azzal a vektorral,

amely a körök középpontjait, azaz az A pontot a B ponttal összeköti. A vektor A pontjából kettőt jobbra, majd négyet lefelé lépve érünk a B pontba. Így az ugyanekkora nagyságú és ugyanolyan irányú vektor, mint amit keresünk. Tehát az origóból elindulva is kettőt jobbra és utána négyet lefelé kell mozogni, hogy megkapjuk a keresett vektort.



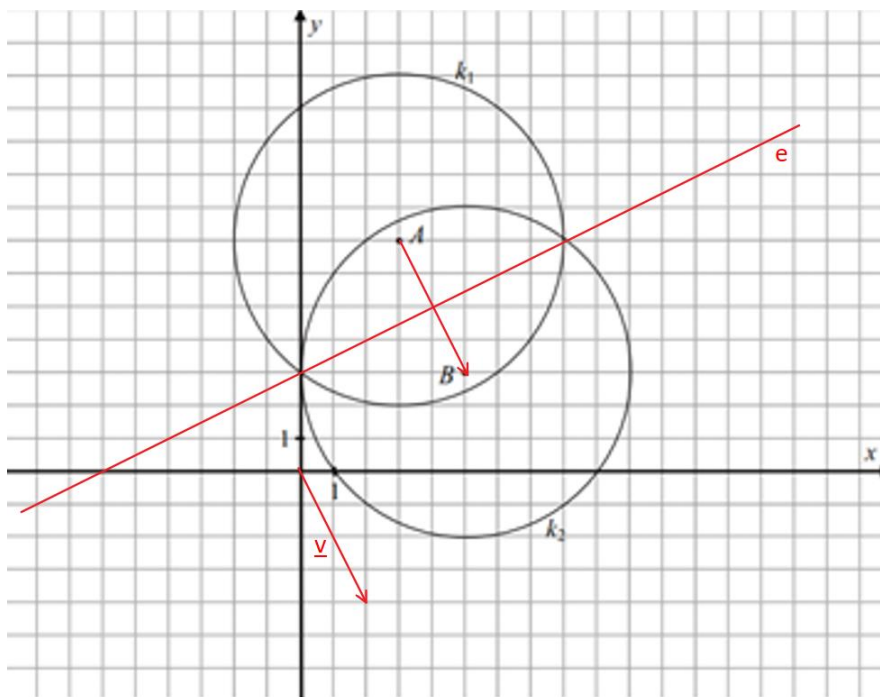
b) Add meg annak a C pontnak a koordinátáit, amelyre a k_1 kört tükrözve a k_2 kört kapjuk!

A keresett C pont a körök középpontjait összekötő szakasz felezőpontja lesz.

C (4 ; 5)

c) Rajzold be az ábrába azt az e egyenest, amelyre a k_1 kört tükrözve a k_2 kört kapjuk!

Ez az egyenes áthalad a két kör közös pontjain, hiszen ezek a tengelyes tükrözés során fixpontok.



d) – e) Add meg annak a lineáris függvénynek a képletét, amelynek a grafikonja az általad előbb berajzolt e egyenes!

Az e egyenes az y tengelyt a $(0;3)$ pontban metszi, ezért a $b = 3$. (Lineáris függvények általános képlete: $f(x) = mx + b$.)

A függvény meredeksége pedig $\frac{1}{2}$.

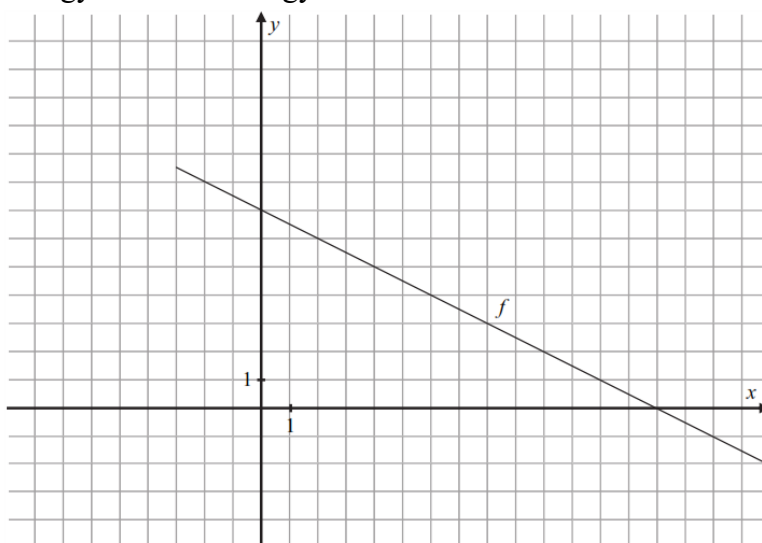
$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

Fuggvények_02_2015_első_06

Az alábbi ábrán (jobbra) egy f -fel jelölt egyenesnek csak egy szakaszát ábrázoltuk.

a) A P és az R pont az f egyenesen helyezkedik el. Határozd meg ennek a két pontnak a hiányzó koordinátáit!

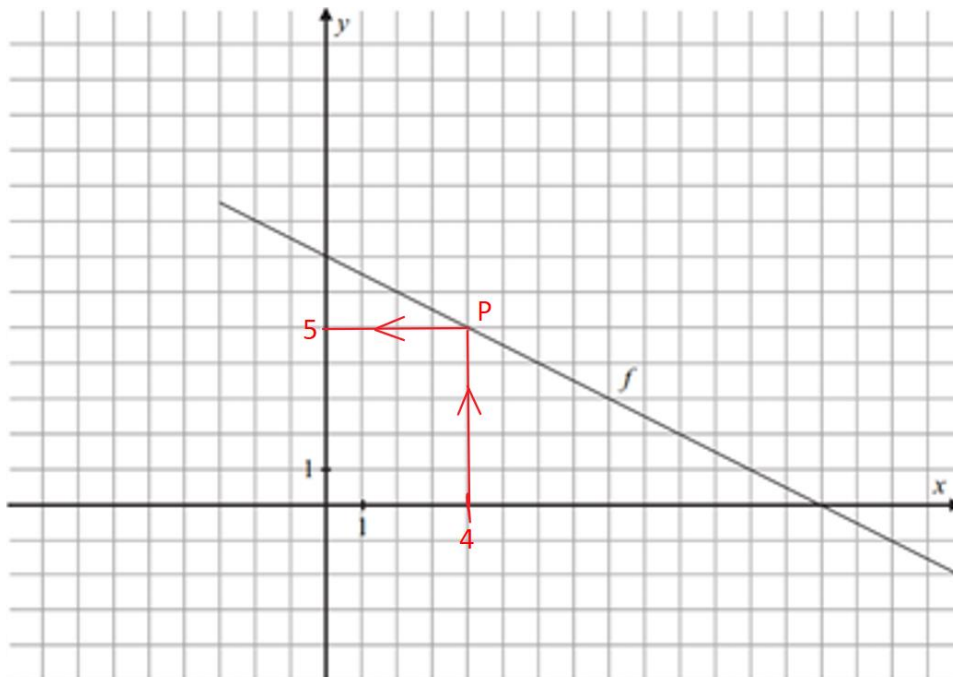
$P(4; \dots)$ $R(\dots; 2,5)$



A $P(4; \dots)$ pont első koordinátája 4, azaz $X = 4$, az X tengelyen a 4 helytől felfelé, a függvény grafikonjának irányában haladva megkeressük a P pontot a grafikonon. Ezután

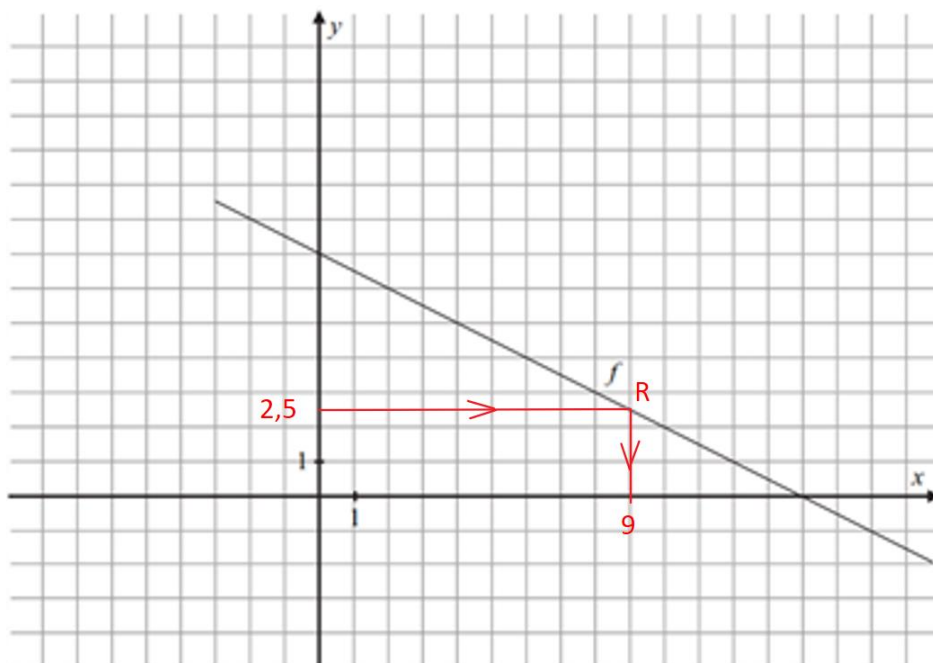


ennek a pontnak leolvassuk a második koordinátáját, azaz a P pontból kiindulva vízszintesen (az x tengellyel párhuzamosan) haladunk az y tengely felé.



A P pont koordinátái tehát: $(4; 5)$

Az $R(\quad ; 2,5)$ esetében az y tengelynél keressük meg a $2,5$ – öt, mert ez a második koordináta. Ebből a pontból egy egyenes mentén (x tengellyel párhuzamosan haladva) megkeressük a grafikonon az R pontot.



Az R pontból merőleges haladva az x tengelyen a 9 helyre érkezünk, így az R pont koordinátái: $(9; 2,5)$.

b) Döntsd el, hogy az f egyenes alatt, fölött, vagy az f egyenesen helyezkednek-e el az alábbi pontok!

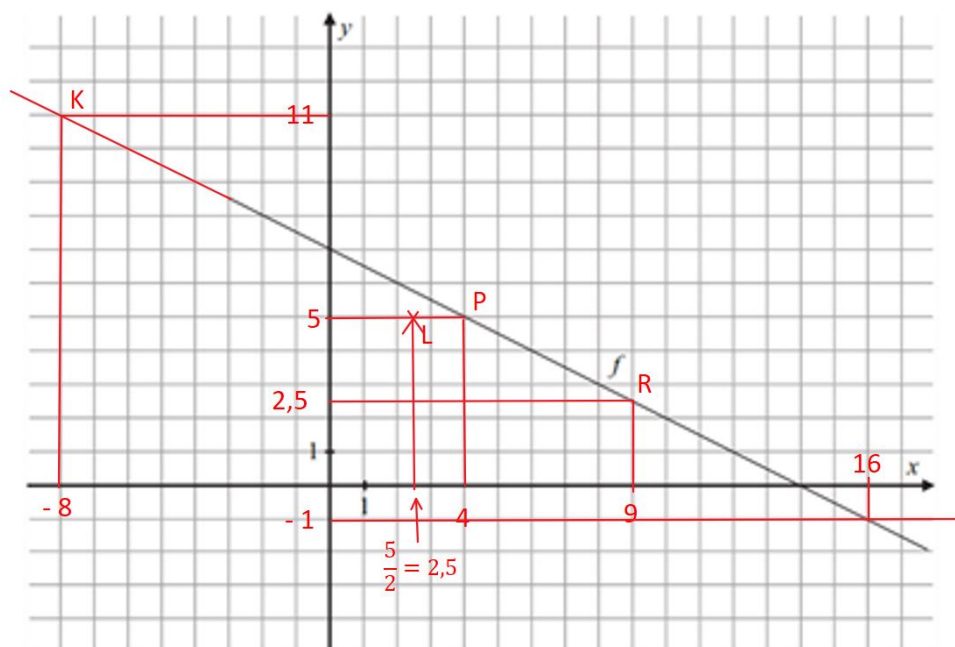
Írj X-et a táblázat megfelelő
mezőibe!

	alatta	fölötte	rajta
$K(-8; 11)$			
$L\left(\frac{5}{2}; 5\right)$			
$M(22; -1)$			

Egyszerűbb (gyorsabb) megoldás:

Az egyenest meghosszabbítva az első pontot (K -t) azonnal megtaláljuk a grafikonon.

A második (L pontot) is be tudjuk rajzolni a koordináta-rendszerbe, így látható, hogy L az egyenes alatt van.



Az M pont esetében megkeressük, hogy az egyenes hol veszi fel a -1 értéket ($x = 16$ helyen) és tudjuk, hogy ez az egyenes mint függvény csökkenő, ezért jobbra haladva $x = 22$ helyen biztosan kisebb értéket fog felvenni, mint -1 . Tehát M pont az egyenes felett lesz.

	alatta	fölötte	rajta
$K(-8; 11)$			X
$L\left(\frac{5}{2}; 5\right)$	X		
$M(22; -1)$		X	



Egy sokkal időigényesebb megoldási mód:

Ennél a feladatnál meg lehetne határozni az f egyenes hozzárendelési szabályát az egyenes grafikonja alapján is. Mivel az f egyenes az y tengelyt a 7 helyen metszi, azért a $b = 7$. ebből a pontból 2 – t jobbra haladva és egyet lefelé jutunk el a következő rácspontig, ezért a függvény meredeksége $(m) = -\frac{1}{2}$. Így az f egyenesnek, mint egy lineáris függvény grafikonjának a hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = mx + b \text{ alapján: } f(x) = -\frac{1}{2}x + 7.$$

(Az $f(x) = mx + b$ és az $y = mx + b$ írásmód egyenértékű.)

Ekkor a megadott pontok első koordinátáit behelyettesítve a képletbe ellenőrizni tudjuk, hogy a kapott eredmény kisebb, nagyobb vagy egyenlő – e a pontok második koordinátájával. Ha kisebb, akkor a pont az egyenes fölött lesz, ha nagyobb, akkor a pont a függvény grafikonja (egyenes) alatt lesz.

$K(-8; 11)$ pont esetében:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 7 = -\frac{1}{2}(-8) + 7 = 4 + 7 = 11$$

Tehát ez a pont rajta van az egyenesen.

$L(\frac{5}{2}; 5)$ pont esetében:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 7 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + 7 = -\frac{5}{4} + 7 = -\frac{5}{4} + \frac{28}{4} = \frac{23}{4} > 5$$

Tehát ez a pont az f egyenes alatt van.

$M(22; -1)$ pont esetében:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 7 = -\frac{1}{2} \cdot 22 + 7 = -11 + 7 = -4 < -1$$

Tehát ez a pont az f egyenes fölött van.



Fuggvények_03_2017_első_08

Karikázd be annak a kifejezésnek, illetve számnak a betűjelét, amellyel az egyes állítások igazak lesznek!

Az alábbiak közül $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$ függvény grafikonján lévő pont koordinátái:

- (A) (1; 2) (B) (4; 1) (C) (2; 1) (D) (5; 3)

Az $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$ ugyanazt jelenti, mint az $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ vagy az $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Egy pont esetében a koordináták $(x; y)$ így is átírhatók:

$(x; f(x))$ vagy $(x; \frac{1}{2}x - 1)$. Tehát a megadott pontok első koordinátáit behelyettesítve x

helyére ki kell számolni $\frac{1}{2}x - 1$ értékét. Ha az megegyezik a pont második koordinátájával, akkor a pont rajta van a függvény grafikonján. Ha szerencsénk van, akkor elsőre eltaláljuk a keresett pontot, ekkor a többi pontnál már nemszükséges kiszámítani a helyettesítési értéket, hiszen csak egy jó megoldás van, időnk pedig kevés.

Táblázatba foglalva a számításokat:

Megadott pont	Behelyettesítés	Konklúzió
(A) (1; 2)	$\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \neq 2$, ezért ez a pont nincs rajta a grafikonon.
(B) (4; 1)	$\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 1$	Ez a pont rajta van a grafikonon.
(C) (2; 1)	$\frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$	$0 \neq 1$, ezért ez a pont nincs rajta a grafikonon.
(D) (5; 3)	$\frac{1}{2} \cdot 5 - 1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \neq 3$, ezért ez a pont nincs rajta a grafikonon.

Megoldás:

- (A) (1; 2) **(B) (4; 1)** (C) (2; 1) (D) (5; 3)

**Fuggvények_04_2018_elso_08**

Minden kérdés után karikázd be a helyes válasz betűjelét!

a) Az alábbiak közül melyik függvény grafikonján van rajta a (3; 5) pont?

(A) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (B) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (C) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (D) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

Az $x \mapsto ax + b$ ugyanazt jelenti, mint az $f(x) = ax + b$ vagy az $y = ax + b$.

(Az „a” helyett írható „m” is, ekkor utalunk a meredekségre, ami az x együtthatója az egyenletben.)

A (3; 5) pont esetében a koordináták a következőket jelentik:

első koordináta: 3	második koordináta: 5
$x = 3$	$f(3) = 5$
$x = 3$	$y = 5$
$x = 3$	$3 \mapsto 5$

Tehát a megadott hozzárendelések esetében x helyére be kell helyettesíteni a 3 – at. Ki kell számolni a helyettesítési értékeket és le kell ellenőrizni, hogy ezek az értékek egyenlők – e a megadott pont második koordinátájával, azaz 5 – tel.

Ha szerencsénk van, akkor elsőre eltaláljuk a keresett hozzárendelést, ekkor a többi hozzárendelési szabálynál már nemszükséges kiszámítani a helyettesítési értéket, hiszen csak egy jó megoldás van, időnk pedig kevés.

Táblázatba foglalva a számításokat:

Hozzárendelési szabály	Behelyettesítés ($x = 3$)	Konklúzió
(A) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$2 \neq 5$, ezért a (3; 5) pont nem ezen a grafikon van rajta.
(B) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$	$3 \neq 5$, ezért a (3; 5) pont nem ezen a grafikon van rajta.
(C) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$4 \neq 5$, ezért a (3; 5) pont nem ezen a grafikon van rajta.
(D) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$	Itt megkaptuk a pont második koordinátáját, ezért a (3; 5) pont ezen a grafikon van rajta.

(A) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (B) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (C) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (D) $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$



Fuggvények_05_2018_masodik_08

Minden kérdés után karikázd be a helyes válasz betűjelét!

Melyik pont van rajta az $f(x) = \frac{6}{x} + 2$ függvény grafikonján?

- (A) (3; 5) (B) (2; 6) (C) (0,5; 14) (D) $\left(\frac{1}{6}; 3\right)$

Az a pont van rajta a megadott függvény grafikonján, amelynek első koordinátáját behelyettesítve az x helyére a függvény képletében, a függvényértéknek megkapjuk a pont második koordinátáját.

(Érdemes itt talán hátulról kezdeni a próbálkozást (D aztán C, ...), mivel csak egy megoldás van, ha azt megtaláltuk nem kell tovább számolnunk. Eddigi években a hátulról kezdést kifizetődő volt, hamarabb ráleltünk a megoldásra.)

A számításainkat táblázatba foglalva:

Megadott pont	Az adott x behelyettesítése a $\frac{6}{x} + 2$ -be.	Konklúzió
(A) (3; 5)	$\frac{6}{3} + 2 = 2 + 2 = 4$	$4 \neq 5$, ezért ez a pont nincs rajta az $f(x)$ grafikonján.
(B) (2; 6)	$\frac{6}{2} + 2 = 3 + 2 = 5$	$5 \neq 6$, ezért ez a pont nincs rajta az $f(x)$ grafikonján.
(C) (0,5; 14)	$\frac{6}{0,5} + 2 = 12 + 2 = 14$ $\left(\frac{6}{0,5} = 6 : 0,5 = 60 : 5 = 12\right)$	Itt egyezik a pont második koordinátája a helyettesítési értékkel, ezért ez a pont rajta az $f(x)$ grafikonján.
(D) $\left(\frac{1}{6}; 3\right)$	$\frac{6}{\frac{1}{6}} + 2 = 36 + 2 = 38$ $\frac{6}{\frac{1}{6}} = 6 : \frac{1}{6} = 6 \cdot \frac{6}{1} = 36$	$38 \neq 3$, ezért ez a pont nincs rajta az $f(x)$ grafikonján.

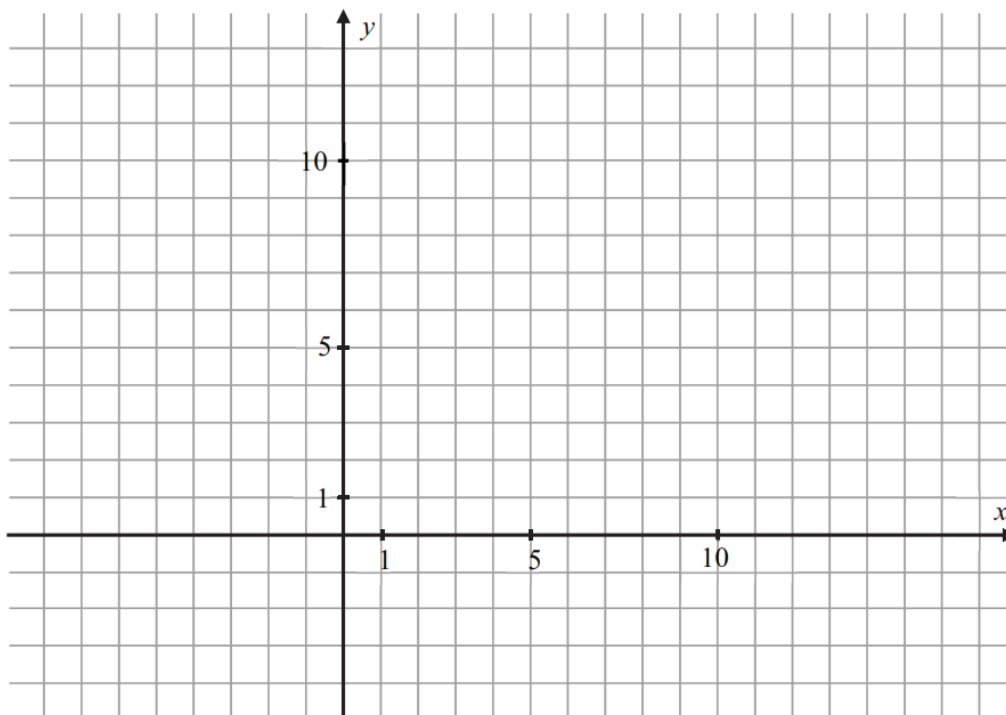
- (A) (3; 5) (B) (2; 6) (C) (0,5; 14) (D) $\left(\frac{1}{6}; 3\right)$



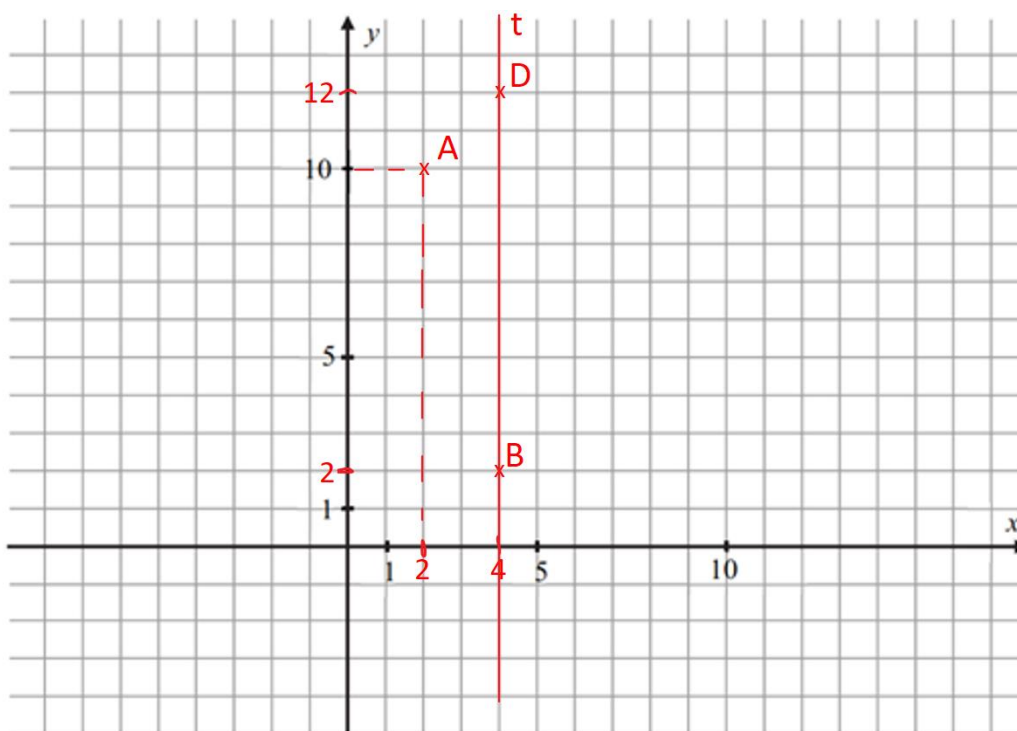
Fuggvények_06_2021_harmadik_06

Az $ABCD$ deltoid tükörtengelye a DB átlóegyenes. A deltoid három csúcsának koordinátái: $A(2; 10)$, $B(4; 2)$ és $D(4; 12)$.

a-b) Rajzold be az $ABCD$ deltoidot az alábbi koordináta-rendszerbe!



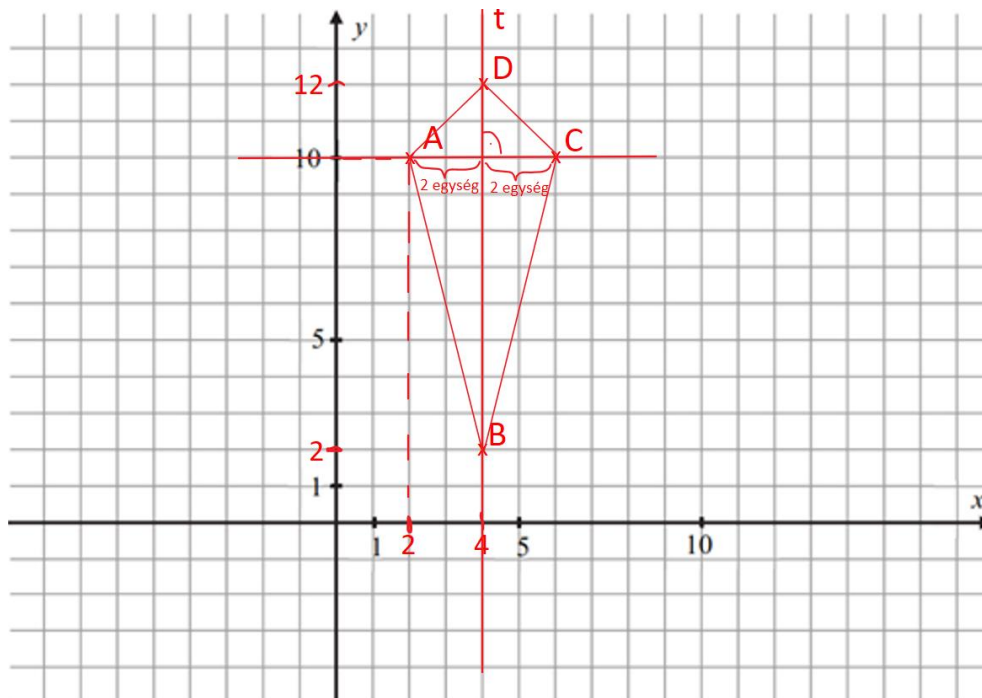
Rajzoljuk be a három megadott pontot és a DB átlóegyenesét, t tükörtengelyt, a koordináta-rendszerbe.





c) Add meg a deltoid negyedik csúcspontjának koordinátáit!

Tükrözzük az A pontot t -re, ez lesz a C pont. Kössük össze a pontokat, így megkapjuk az ABCD deltoidot.



$C(6; 10)$

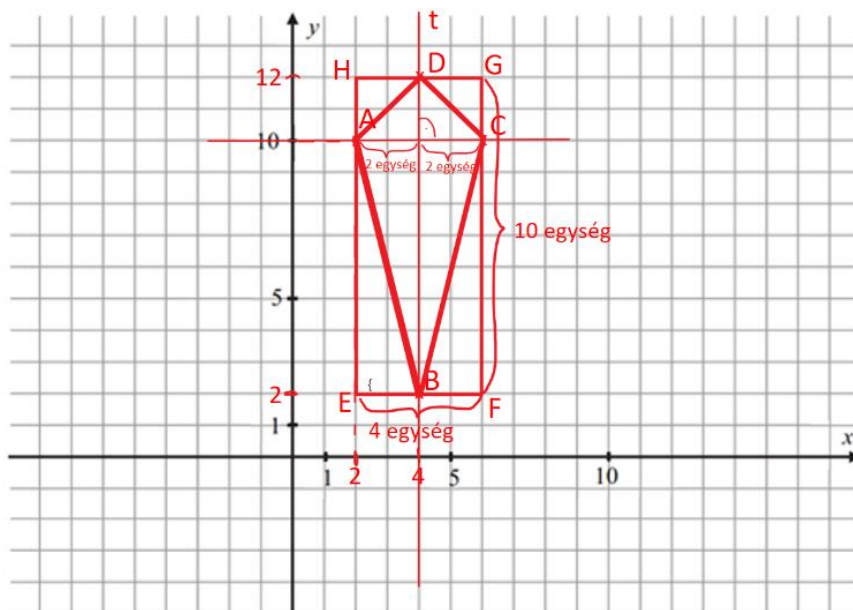
d-e) Hány területegység az ABCD deltoid területe?

(Egy területegységnyi területű az egységnyi oldalhosszúságú négyzet.)

Válaszodat számítással vagy rajzzal indokold!

Első megoldás:

Egészítsük ki egy téglalappá a deltoidot, ekkor a deltoid területe ennek a téglalap területének éppen a fele lesz. (Ugyanannyi és ugyanolyan két-két háromszögből áll a deltoid, mint a deltoidot téglalappá kiegészítő rész.)



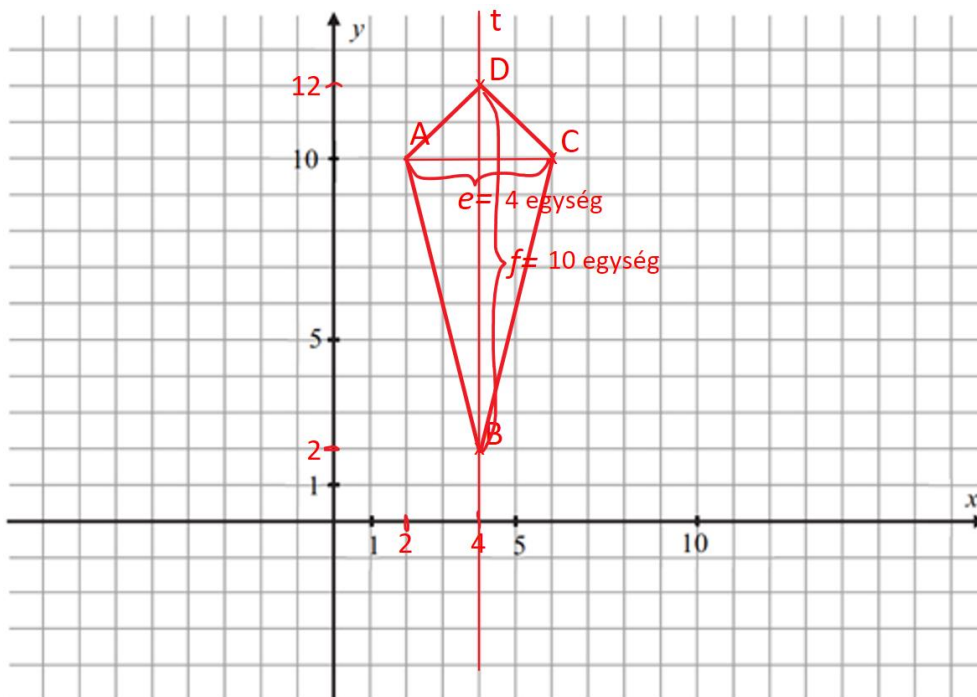
A deltoid területe így $T_{ABCD \text{ deltoid}} = T_{EFGH \text{ téglalap}} : 2 = (4 \cdot 10) : 2 = 20$ területegység.



Az $ABCD$ deltoid területe **20** területegység.

Második megoldás:

A deltoid területe kiszámítható a $T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}$ képlet segítségével, azaz a deltoid átlóinak hosszát össze kell szorozni, majd a szorzatot elosztani kettővel.



$$T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20 \text{ területegység.}$$

Az $ABCD$ deltoid területe **20** területegység.

Fuggvények_07_2022_masodik_07_b

Minden kérdés után karikázd be az egyetlen helyes válasz betűjelét!

b) Adott két lineáris függvény hozzárendelési szabálya.

$$e: y = 3x - 5 \quad f: y = -2x + 10$$

Melyik függvény egyenesén van rajta a $P(3; 4)$ pont?

(A) Csak az e függvény egyenesén, de az f függvény egyenesén nem.

(B) Csak az f függvény egyenesén, de az e függvény egyenesén nem.

(C) Egyik függvény egyenesén sincs rajta.



(D) A P pont az e függvény és az f függvény egyenesének közös pontja.

A $P(3; 4)$ pont első koordinátája az x , azaz $x = 3$.

A másik koordinátája pedig y , azaz $y = 4$.

A P pont annak a függvénynek az egyenesén van rajta, ahol x helyére beírva a 3 – at eredményül 4 – et kapunk.

A számításokat táblázatban összefoglaljuk:

Függvény hozzárendelési szabálya	x	Behelyettesítés	Rajta van – e a függvény egyenesén a P pont?
$e: y = 3x - 5$	$x = 3$	$y = 3 \cdot 3 - 5 = 4$	igen
$f: y = -2x + 10$	$x = 3$	$y = -2 \cdot 3 + 10 = -6 + 10 = 4$	igen

Mivel mindkét függvény egyenesén rajta van a két pont, ezért ebben a $P(3; 4)$ pontban metszi egymást a két egyenes. Így a helyes válasz a D.

Melyik függvény egyenesén van rajta a $P(3; 4)$ pont?

(A) Csak az e függvény egyenesén, de az f függvény egyenesén nem.

(B) Csak az f függvény egyenesén, de az e függvény egyenesén nem.

(C) Egyik függvény egyenesén sincs rajta.

☒ (D) A P pont az e függvény és az f függvény egyenesének közös pontja.